定積分とその問題点から

金沢工業大学　工学基礎教育センター
中谷政夫

ねらい

最近では、積分の授業は不定積分から入るのが一般になってきているようですが、本来その記号の意味からやや唐突の感がまぬかれません。やはり定積分から入ることが自然であると思われる。ここではそのような視点から、まず定積分に到る歴史的な背景の一端を覗いてから、もう一度積分の全体像の概略を見てみようとするものです。その上でさらに何が問題なのかを述べてもう一段上の議論への動機付けになればということで本テーマを考えた。

目次

1　図形と面積

今改めて面積とは何かを考えてみると、誰しもまず最初に基準を設ける必要があることに気づくと思います。まず長さ１という基準を定義（約束）することから出発して、（単位はここでは特にこだわらない）この長さ１を１辺にもつ正方形の面積を１と決めます。

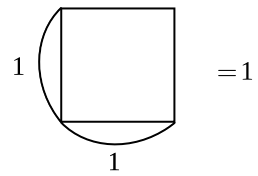


図 1. 1

次に横、または縦の長さを a 倍すれば面積は a 倍になると考えるのは自然なことでしょうから、縦横の辺の長さをそれぞれ、例えば縦が a 、横の長さが b の長方形の面積が ab とするのはやはり自然といえるでしょう。実際 a, b が正の整数ならば、１辺の長さ１の正方形が ab 個並びますからこのようにいえるわけです。

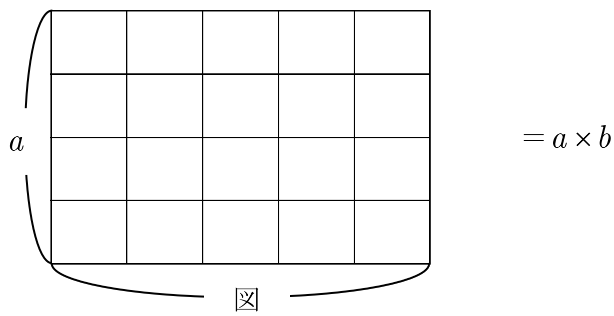


図 1. 2

すると図のような三角形 ABC の面積も長方形との下図のような関係から

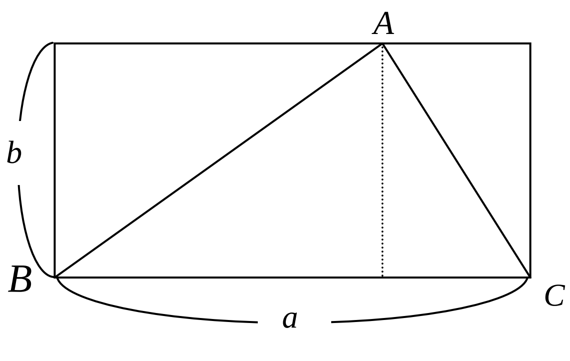


図 1. 3

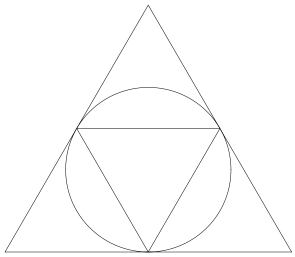
$\dfrac{1}{2}ab$ となることが容易にわかりますから、こうして三角形の面積が定まれば、多角形は三角形に分割して考えることによってその面積も求まることがわかります。

それでは曲線で囲まれた図形の場合はどうすればよいでしょうか。

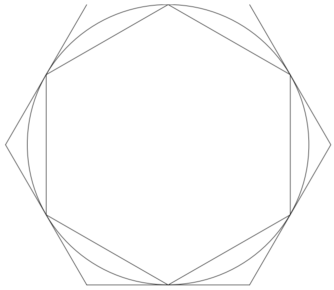
初めに良く知っている円の場合で考えてみます。文献[1]にあるように、面積の式πr^2が早くから知られていました。そこに述べてあるように、この分割そのものの考え方は既に紀元前２００年前アルキメデスにあったようです。ここでもう一度その考えを円周率πの例で見てみます。

πの求め方（アルキメデス）

πとは円周率とも言われるように、円周に対する直径との比のことですから、直径が１の円に対する円周の長さになります。それをあのアルキメデスは、以下の図が示すようなやりかたで求めたことが知られています。



$$\frac{3\sqrt{3}}{2} < l < 3\sqrt{3}$$



$$3 < l < 2\sqrt{3}$$

図 1.4

このようにしてアルキメデスはなんと正 96 角形まで考えて $3\frac{10}{71} < l < 3\frac{1}{7}$　つまり $3.1408 < l < 3.1429$　を得たことが知られています。

ちなみにこの円周率πは、円周（Peripheria）というギリシャ語の頭文字に由来しているといわれます。それではアルキメデスは、この操作を無限に続けることによってπの正確な値を得られると考えたのでしょうか。それはどうもためらったようです。

理由は単に複雑になるというより、それは当時流行していた弁論術に関連して、いわゆる「ゼノンの逆理」といわれる一種の詭弁（きべん）にその理由があったようなのです。当時のギリシャでは、世界史上他に例を見ないといってよい、直接民主制という政治制度から、公開の場での討論が隆盛を極めており、なかでも論理にもとづく整然とした論争ほど人々の尊敬を集めたといわれます。討論はいつも酒飲みの口論さながら、大声で激しく相手をいかにやり込めるかが問われたようです。すると優れた弁論家の周りには当然人が集まり、流派を形成して、その中でも特に注目を集めたのがピタゴラス学派や、逆説の大家として今に聞こえるゼノンという弁論家が主宰するエレア学派などでした。エレア学派が主張した有名な逆説に、たとえば

（１）　アキレスは亀に追いつけない。

（２）　飛ぶ矢は飛ばず。

などいくつかあります。（１）は、足が速いことで知られたアキレス（これは実在の人物のようで、おそらく古代オリンピックの勝者？、足の筋肉のアキレス腱の名で今に残っている）が、いかに早く走ろうともずっと前をよちよち歩く亀をおいこすことはできない。なぜならアキレスが亀の出発点Ａまできたときは、亀は少し前のＢに達しているだろうし、アキレス

がＢに達したときはまた亀はほんの少し前のＣに移っているだろう。このようにして常に亀はアキレスの前におり、アキレスは亀を追い越すことはない。

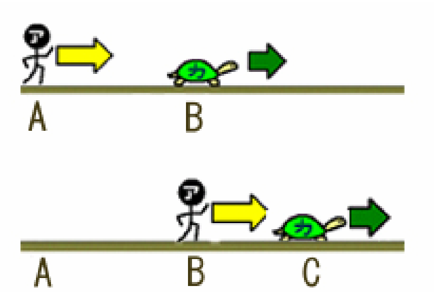


図 1. 5

常識から考えてもこれはどこかが間違っているに違いないのですが、これを理論的に覆すことは少なくとも当時においてはたやすいことではありません。これらは今なら時間の概念を導入して、無限級数の収束の議論を使って説明できるところですが、当時はもちろん最近まで無限を扱うことについてはできることなら触れないできたといえるほどに恐れられたテーマであったのですが、逆説家のゼノンにとっては格好の論争の材料になったようです。

２．面積から積分へ

ここまでの議論で図形の面積を求めるには、やはり適当に三角形や長方形に分割してそれらを足していくのが妥当な方法のようですが、それをもう少し理論的に納得できる形にしなければなりません。

まず具体的な例から見てみます。

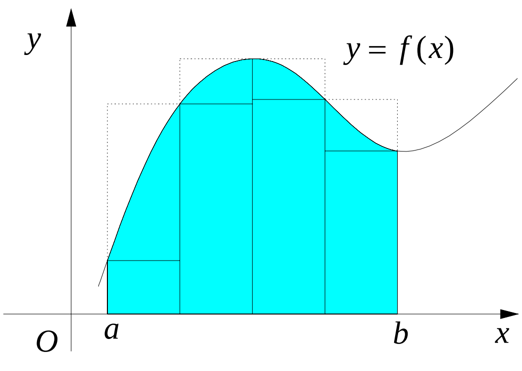


図 2. 1

上の例では区間$[a, b]$ を４等分して、 x 座標を左から順にそれぞれ

$$x_0 = a, x_1, x_2, x_3, x_4 = b$$

とし、図のような長方形を２種類作って曲線部分を囲み、本当の面積を上下から挟み込めば少なくとも求める面積はその間にあると想像できます。そこでこの上下の長方形の面積を考

えてみます。

まず上の部分の長方形の面積の和 S_4 は　小区間の幅 $\dfrac{b-a}{4}$ を Δx と表わせば、

$$S_4 = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x$$

同じく下の部分の長方形の面積の和 s_4 は

$$s_4 = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_3)\Delta x + f(x_4)\Delta x$$

従って本当の面積を S とすれば明らかに

$$s_4 \ < \ S \ < \ S_4$$

であることがわかります。

上の図 2.1 の例で見てきたように、曲線で囲まれた図形の面積を考えるとき、既にわかっている事実（ここでは長方形の面積）を利用して限りなく求める図形に近づけて行くという方法をとるということです。さしあたり、これ以外の良い方法はないといってよいでしょう。もう少し詳しく説明すると以下に述べるようになります。

考え方：下図のように長方形で小さいほうからと、大きいほうからの両方からの挟み撃ちの形で近似する。

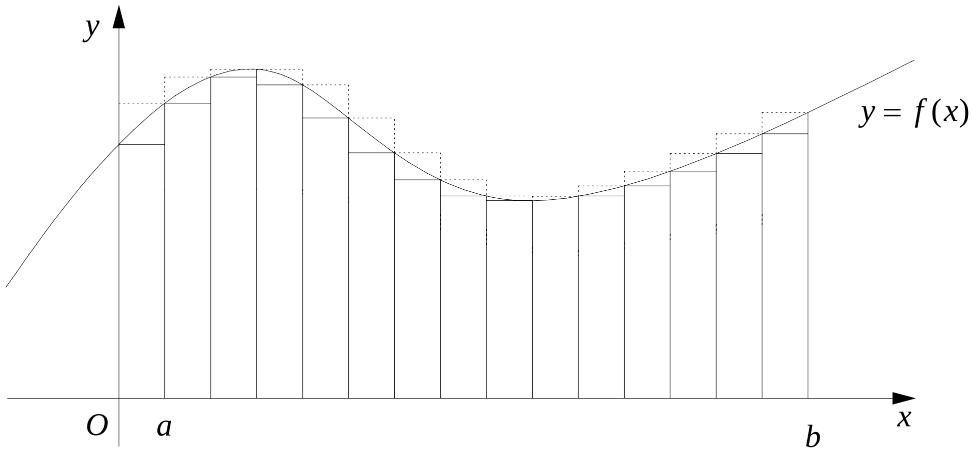


図 2. 2

例えば４分割を８分割更に１６分割に… と、どんどん細かくしていくと図形の真の面積と、挟み撃ちをしようとする長方形の面積との誤差は確実に減っていくのがわかります。

そこでこれを限りなく増やしていって（等分割の場合は、これを $n \to \infty$ または $\lim\limits_{n\to\infty}$ という記号で表すが、そうと限らないときは、$\delta = \max\limits_{1\le i\le n}(x_i - x_{i-1})$ とおいて、$\delta \to 0$ のように表す)、大きい方の長方形の面積の和と小さい方の長方形の面積の和とが一致すればそのときその値を求める図形の面積ということにします。区分求積法というのがその実際の求め方になるわけですがそれはこのシリーズ[1]に譲ることにして、これを一般な式の形でまとめてみましょう。以下ここでは区間 $[a\,, b]$ で $f(x) > 0$ とします。

区間$[a\,,b]$をn分割（必ずしも等分割でなくてもよい）してこのときの分点を

$$\Delta:\ \ x_0 = a < x_1 < x_2 < \ \cdots\ < x_{n-1} < x_n = b$$

として各小区間$[x_{j-1}, x_j]$の範囲内での$f(x)$の最小値をm_j、最大値をM_jとすると、まず小さい方の長方形の面積の和は

$$m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \cdots + m_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{j=1}^{n} m_j \Delta x_j \eqqcolon s_\Delta$$

ただし　$\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$

次に大きい方の長方形の面積の和は

$$M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \cdots M_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{j=1}^{n} M_j \Delta x_j \eqqcolon S_\Delta$$

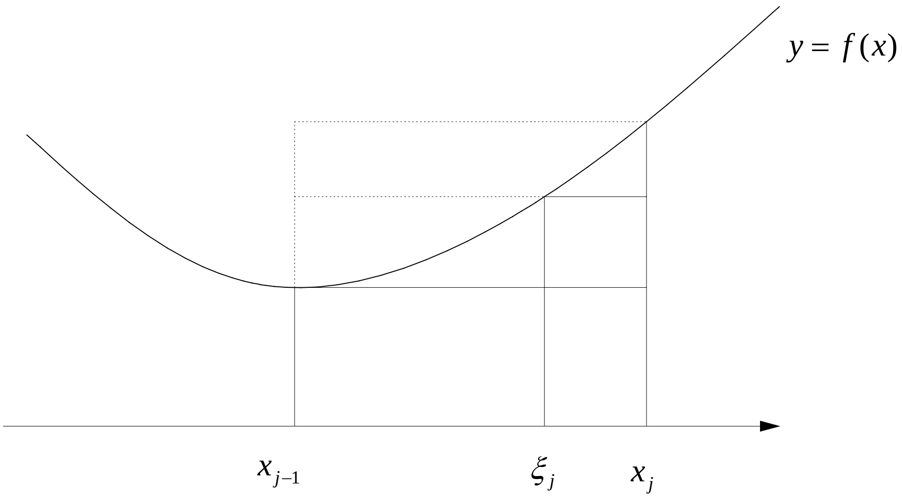


図 2.3

ξ_jを各小区間$[x_{j-1}, x_j]$の中の任意の点とすれば明らかに

(2.1)　　$$s_\Delta = \sum_{j=1}^{n} m_j \Delta x_j \ \le\ \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\Delta x_j \le\ \sum_{j=1}^{n} M_j \Delta x_j = S_\Delta$$

注：この(2.1)の真ん中の項、$\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\Delta x_j$をリーマン和という。

このとき、$\delta = \max_{1 \le j \le n} \Delta_{x_j}$とおいて、もしも

(2.2)　　$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{j=1}^{n} m_j \Delta x_j = \lim_{\delta \to 0} \sum_{j=1}^{n} M_j \Delta x_j = S$$

ならばこのSの値を今の図形の面積と考えるのが自然でしょう。
それでは、どんな場合にこの関係式がなりたつのでしょうか。
上の(2.2)を言い換えれば、

(2.3)　　$$0 = S - S = \lim_{\delta \to 0} \sum_{j=1}^{n} M_j \Delta x_j - \lim_{\delta \to 0} \sum_{j=1}^{n} m_j \Delta x_j = \lim_{\delta \to 0} \sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j)\Delta x_j$$

となります。このとき(2.1)より

(2.4) $$S = \lim_{\delta \to 0} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j) \Delta x_j$$

となりこれを簡単に表した式が

(2.5) $$\int_a^b f(x)dx$$

です。

このような積分法を我々はリーマン積分（以下Ｒ積分と表現する）と呼び、この値が有限確定するとき、リーマン積分可能（同じくＲ積分可能）と言います。要するに通常の積分がリーマン積分なのです。そしてこれは $y = f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で $f(x) \ge 0$ ならば、x 軸と２直線 $x=a, x=b$ および曲線 $y = f(x)$ で囲まれる図形の面積を表します。

(2.3) から、もし、$y = f(x)$ が連続ならば、各小区間 $[x_{j-1}, x_j]$ で、$f(x)$ の最小値 m_j 、最大値 M_j を与えるそれぞれの点 ξ_j, η_j （$x_{j-1} \le \xi_j, \eta_j \le x_j$）

があって $f(\xi_j) = m_j,\ f(\eta_j) = M_j$ となり、$M_j - m_j$ はいくらでも小さくできます。そして閉区間 $[a,b]$ を考慮すれば(2.3)が成り立つことが理解できるでしょう。(このような議論に不満を感じるならばそのときは是非本格的な数学書、例えば文献[2]等を読むことを薦めます。今の場合は関数の一様連続性の理解が必要なのです。)

以上をまとめると、$y = f(x)$ が連続ならば(2.2)が成り立ち、積分(2.5)の値が確定するということになります。

３.微分積分の基本定理

周知の微分積分の基本定理について、もう一度簡単にさらっておきます。

$y = F(x)$ のとき

$$F'(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \lim_{\vartriangle t \to 0} \frac{F(t + \vartriangle t) - F(t)}{\vartriangle t}$$

であったから、これを図でみると今の場合、

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

とおくと、$F(t + \vartriangle t) - F(t)$ は下の図 3.1 の斜線部分の面積に等しい。さらにこの部分を拡大してみた図がその下[図 3.2 である。

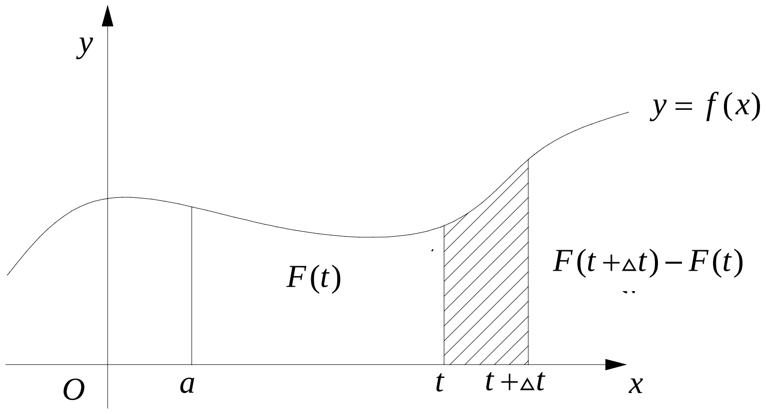


図 3. 1

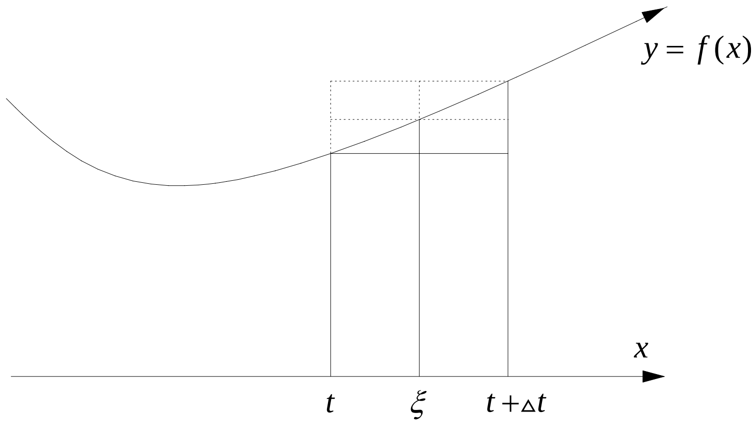


図 3. 2

この斜線部分は、適当な（上の図にあるような）長方形の面積に等しいことがみてとれるであろう・（じつはこれが連続関数の持っている性質の１つを使っているのだが）

すなわち、長方形の面積＝底辺×高さ

$$= \triangle t \times f(\xi)$$

ここでξ はt と$t+\triangle t$ の間の適当な点にとれることがわかるでしょうから、

よって

$$t \leq \xi \leq t+\triangle t \quad \text{で}$$

$$F'(t) = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle t \times f(\xi)}{\triangle t}$$

$$= \lim_{\triangle t \to 0} f(\xi) \qquad t \leq \xi \leq t+\triangle t$$

$$= f(t)$$

これで予想が成り立つことがわかった。従って

(3. 1) $$\left(\int_a^t f(x)dx\right)' = f(t)$$

だから$\int_a^t f(x)dx = F(t)$とおくと$F'(t) = f(t)$であり、$(F(t)+C)' = f(t)$もいえるから
今の面積の議論からすればこのCは確定した値でなければならない。たとえば
$t=a$とおけば図の面積は０でなければならないから、$t=a$を代入して

$$0 = \int_a^a f(x)dx = F(a) + C$$

よって　$C = -F(a)$　でなければならないから

$$\therefore\quad \int_a^t f(x)dx = F(t) - F(a)$$

そこで　$\int f(x)dx$　は　$F'(x) = f(x)$　となる　$F(x)$　と表すことにして

$$\int f(x)dx \ = \ F(x)$$

と書いてこれを$f(x)$の不定積分、または$f(x)$の原始関数といい、

(3.2)　　　$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$　　（これを$\left[F(x)\right]_a^b$　と表す）

を$f(x)$の$x=a$から$x=b$までの定積分というのである。
良く知っている図形の場合と、三角関数の例で確かめてみよう。

［例3.1］①

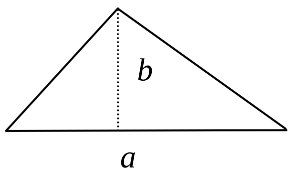
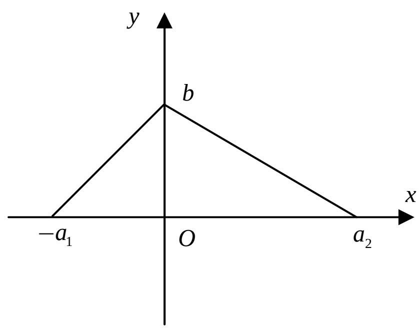


図3.3



$a = a_1 + a_2$

図3.4

ここで図3.3のような三角形の面積を求めるために、上の式（3.2）を使ってみよう。そのために右側の図3.4のように座標をとれば、

$$\begin{aligned}
\int_{-a_1}^0 \left(\frac{b}{a_1}x + b\right) dx + \int_0^{a_2} \left(-\frac{b}{a_2}x + b\right) dx &= \left[\frac{b}{2a_1}x^2 + bx\right]_{-a_1}^0 + \left[-\frac{b}{2a_2}x^2 + bx\right]_0^{a_2} \\
&= -\left(\frac{b}{2a_1}a_1^2 - a_1 b\right) + \left(-\frac{b}{2a_2}a_2^2 + a_2 b\right) \\
&= -\frac{a_1 b}{2} + a_1 b - \frac{a_2 b}{2} + a_2 b \\
&= \frac{a_1 + a_2}{2} b \\
&= \frac{1}{2}ab
\end{aligned}$$

これは確かによく知る図 3.3 の三角形の面積になっている。

② $y=\cos x$ について、区間 $[0,x]$ での積分を考える。
まず、区間 $[0,x]$をn 等分割して

$$0<\frac{x}{n}<\frac{2x}{n}<\cdots\cdots<\frac{(n-1)x}{n}<\frac{n}{n}x=x$$

この分点でのリーマン和を考える。

$$S=\cos\frac{1}{n}x\times\frac{1}{n}x+\cos\frac{2}{n}\times\frac{1}{n}x+\ \cdots\cdots\ +\cos\frac{n}{n}x\times\frac{1}{n}x$$

$$=(\cos\frac{1}{n}x+\cos\frac{2}{n}x+\ \cdots\cdots\ +\cos\frac{n}{n}x)\times\frac{1}{n}x$$

ここで良く知られた公式、

$$\cos\theta+\cos2\theta+\ \cdots\cdots\ +\cos n\theta=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\theta-\sin\frac{1}{2}\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta}$$

を用いるのであるが、念のためこれを証明しておこう。

$$M=\cos\theta+\cos2\theta+\ \cdots\cdots\ +\cos n\theta$$

とおくと、両辺$\times\sin\dfrac{\theta}{2}$ として、公式

$$\frac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right\}=\cos\alpha\sin\beta$$

より

$$M\times\sin\frac{\theta}{2}=\cos\theta\sin\frac{\theta}{2}+\cos2\theta\sin\frac{\theta}{2}+\ \cdots\cdots\ +\cos n\theta\sin\frac{\theta}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{(\sin\frac{3}{2}\theta-\sin\frac{\theta}{2})+(\sin\frac{5}{2}\theta-\sin\frac{3}{2}\theta)+\ \cdots\cdots\ +(\sin\frac{2n+1}{2}\theta-\sin\frac{2n-1}{2}\theta)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}(\sin\frac{2n+1}{2}\theta-\sin\frac{1}{2}\theta)$$

よって

$$M=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\theta-\sin\frac{1}{2}\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta}$$

これで証明できた。これをS の式へ代入して

$$S=\frac{\frac{1}{2n}x\cdot(\sin\frac{2n+1}{2n}x-\sin\frac{1}{2n}x)}{\sin\frac{x}{2n}}$$

$$= \frac{\sin\frac{2n+1}{2n}x - \sin\frac{1}{2n}x}{\dfrac{\sin\frac{1}{2n}x}{\frac{1}{2n}x}}$$

よって$n \to \infty$ のとき、$\lim_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1$ であるから

$$S \to \sin x$$

これは上の（４）を表すから、いいかえると

$$\int_0^x \cos\theta d\theta = \sin x$$

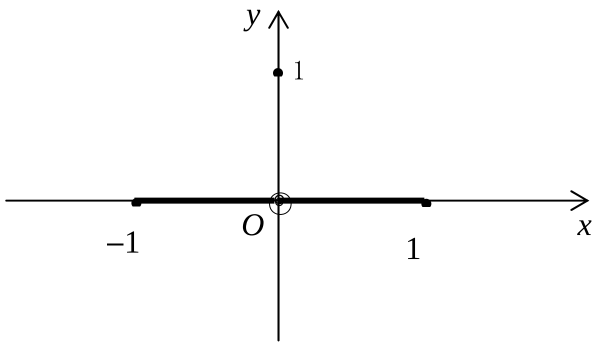
となり、同時に（3.2）もこの場合なりたつことが確かめられた。

上の議論は面積という観点から $f(x) > 0$ としたが、議論をよくみればわかるように、特に積分可能という視点からみるとこの仮定は使われていない。だからこの仮定は積分可能に関しては不要である。

４. リーマン積分の問題点

こうしてみると、R積分はほぼ完全に近い考え方と思えます。しかし特殊な関数や、積分を用いた解析的議論を深めていくと、この定義ではいろいろと不都合な面が現れてくるのです。最初に $y = f(x)$ が連続でなければ（2.2）が成り立たず、積分（2.4）が確定しないのであろうかどうかを考えてみます。まず次の例をみてみましょう。

［例 4.1］ $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad x = 0 \\ 0 & \text{if} \quad -1 \le x < 0 \ \text{ or } \ 0 < x \le 1 \end{cases}$



容易にわかるように閉区間$[-1,1]$ のどんな分割Δをとっても、$s_\Delta = 0$であり、またS_Δは、Oを含む小区間を$\Delta_{x_i} = [x_{i-1}, x_i]$とすれば

$$S_\Delta = 1 \cdot (x_i - x_{i-1}) = \left|\Delta_{x_i}\right| = x_i - x_{i-1}$$

だから、$\delta \to 0$ とすれば明らかに、$S_\Delta \to 0$ となり、よって（2.2）がなりたち、(2.4）の値0が確定する。

この議論から、$y = f(x)$ が有限個の点で不連続であっても、閉区間$[a, b]$で有界ならば（すなわち、ある有限な正数K があって、閉区間$[a, b]$上のどんな点x に対しても

$$\left|f(x)\right| \le K$$

がなりたつとき）R積分可能であることがわかる。(証明は各自考えてください。）これをいいかえると次のようになる・

「積分区間が有限で、与えられた関数が有界ならば、関数の不連続点の集合がたかだか可付。番無限個ならば、関数はリーマン積分可能である。」

次の例はディリクレの関数として良く知られるものです。

［例 4.2］（ディリクレ関数）

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \le x \le 1, \ \text{and} \ x \text{ は有理数}) \\ 0 & (0 \le x \le 1, \ \text{and} \ x \text{ は無理数}) \end{cases}$$

このとき閉区間$[0,1]$ のどんな分割Δをとっても、そのなかのどの小区間$[x_{i-1}, x_i] = \Delta_{x_i}$ をとっても、このΔ_{x_i} の中に必ず有理数の点と無理数の点を含むから、常に

$$S_\delta = 1 \quad s_\delta = 0$$

となる。すなわち上の（2.2)、(2.3）が成り立たないから、この関数はR積分可能ではない。

これを見る限り $y = f(x)$ が、閉区間$[a, b]$で連続ならば

$$F'(x) = f(x)$$

がなりたつことがわかる。それでは連続でなければなりたたないのであろうか。例[4.1]でもう一度確かめてみよう。この例では

$$F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt$$

$$= 0$$

より

$$F'(x) = 0$$

$$\ne f(x) \quad \text{at} \quad x = 0$$

すなわち$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数ではない。

このような簡単な例が示すように、意外にＲ積分の定義は制限が強いことが理解される。
さらにいうならば、有界な関数 $y = f(x)$ が原始関数 $F(x)$ を持っていてもＲ積分可能とは限らないのである。（文献[4]参照）

このようにほぼ完全に近いのでないかと思えたＲ積分であったが、いろいろ問題がありそうである。そして何よりも決定的に不自由な点は、関数列 $\{f_n(x)\}$ がＲ積分可能であって、さらに各点で $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ であっても

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

と限らないのである。これが成り立つためには関数列の収束が各点収束だけではだめで、ここは一様収束という非常に強い条件が必要である。これに関しては数学的に厳密な議論が要求されるのでこれ以上はここでは言及しないでおく。

５．　解決にはどのような考えがあるか。

上に述べたような問題点が生じる原因はどこにあるかを考えるとき、やはりＲ積分の定義のどこかを改良しなければならないであろう。そのときさしあたり考えられるのは区間の分割を改良するしかないように思える。実際それは例[4.2]のディリクレ関数のような場合をみるとわかるように、一般な点集合上の積分を考えるとき、この集合に対する（区間の長さに相当する）何らかの量を定義する必要があることに気がつく。
それが集合に対する測度である。１９世紀後半から２０世紀にかけて多くの数学者がそれぞれの測度論を展開したが、１９０２年にフランスのE. Lebesgueが発表した測度（いわゆるルベーグ測度）とそれにもとずく積分論（ルベーグ積分）のアイディアがもっとも有用であったことから、今日彼の名で呼ばれるルベーグ積分が用いられるようになった。その特長を要約すると以下の通りである。
（１）$[a, b]$ でＲ積分可能ならば、Ｌ積分も可能であって、両者は等しい。

$$(\mathrm{R})\int_a^b f(x)dx = (\mathrm{L})\int_a^b f(x)dx$$

（２）関数 $f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,\ f_n(x), \cdots$ は $[a, b]$ でＲ積分可能で、$[a, b]$ の各点 x で

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

とする。このとき極限関数 $f(x)$ が有界であっても、$f(x)$ がＲ積分可能とは限らない。のみならず、

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

と限らない。

しかしこれがルベーグ積分となると可能である。正確には以下の通りである。

関数 $f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,\ f_n(x),\cdots$ は$[a,b]$ でＬ積分可能で、$[a,b]$ の各点 x で

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \text{（各点収束）}$$

とする。このときもしも関数列 $f_n(x)$ が一様有界、すなわち

（＊）　$$|f_n(x)| \le M \quad (a \le x \le b,\ n = 1, 2,\ \cdots)$$

となる正定数M があれば、 $f(x)$ もまたＬ積分可能で

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx \qquad \text{（Ｌ積分で）}$$

が成り立つ。

実際には、これをもう少し緩やかな条件 (各点収束は、殆どいたるところという表現、そして（＊）は、あるＬ積分可能な関数$\varphi(x)$ が存在して、殆どいたるところ

$$|f_n(x)| \le \varphi(x)$$

ならば）に言い換えて、ルベーグの収束定理の名で利用されることが多い。

こうしたＬ積分が持つすべての利点を、(1) からただ単にこれはＬ積分であると宣言するだけで活用できることが最大のメリットといえる。

参考文献

［1］林一雄　　積分法、　高大連携による数理教育に関する研究会

［2］高木貞治　解析概論、岩波書店

［3］斉藤憲　　よみがえる天才アルキメデス、岩波書店

［4］岸正倫　　ルベーグ積分　サイエンスライブラリ、現代数学への入門７、サイエンス社